DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Partie I

Pour tout x réel, on pose $\rho(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$.

1° Soit θ la racine supérieure à 1 de l'équation

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \theta^n + \frac{(-1)^n}{\theta^n}.$$

Montrer que u_n est un entier.

Quelle est la limite de la suite $\{ \rho(\theta^n) \}$?

2° Soit $Q = X^p + a_1 X^{p-1} + \ldots + a_p$ un polynôme à coefficients *entiers* de degré $p \geqslant 2$. On note $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ les racines réelles ou complexes de Q et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \theta_1{}^n + \theta_2{}^n + \ldots + \theta_p{}^n$$

Montrer que u_n est un entier.

Pour cela, on pourra comparer Q avec le polynôme caractéristique de la matrice carrée d'ordre p : R dont les coefficients r_{ij} sont tels que

$$r_{i\,i+1} = 1 \qquad \text{pour} \quad i \in [1, p-1]$$
$$r_{pi} = -a_{p-i+1} \qquad \text{pour} \quad i \in [1, p];$$

les autres coefficients étant nuls.

Cette méthode n'est pas imposée.

3° On considère à nouveau le polynôme Q de la question précédente et on suppose en outre que la racine θ_1 est réelle et supérieure à 1 tandis que les autres racines vérifient les inégalités

$$|\theta_i| < 1 \qquad \text{pour} \quad i \in [2, p]$$

Montrer qu'il existe deux réels C et γ vérifiant les conditions $C > 0$; $0 \leqslant \gamma < 1$ et tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \rho[\theta_1{}^n] \leqslant C\gamma^n$$

Partie II

Soit $\{ u_n \}$ une suite de réels. Pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $M(n, p)$ la matrice carrée d'ordre $p + 1$ dont les coefficients a_{ij} sont définis par la relation

$$a_{ij} = u_{n+i+j-2}.$$

Ainsi $M(n, 0) = [u_n]$

$$M(n, 1) = \begin{bmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_{n+2} \end{bmatrix} \qquad M(n, 2) = \begin{bmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+3} \\ u_{n+2} & u_{n+3} & u_{n+4} \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

On note $\Delta(n, p)$ le déterminant de la matrice $M(n, p)$.

1° Soit N une matrice carrée d'ordre $r \geqslant 2$. On note N_{ij} le cofacteur du terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de N.

Montrer que si N n'est pas régulière,

$$\forall (i, j, k, l) \in [1, r]^4 \qquad N_{ik} N_{jl} - N_{il} N_{jk} = 0$$

2° Soit p un entier $\geqslant 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(n, p) = 0$.

Déduire de la question précédente une relation entre

$$\Delta(n, p-1), \quad \Delta(n+1, p-1), \quad \Delta(n+2, p-1).$$

3° On reprend l'hypothèse $\Delta(n, p) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on suppose en outre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Delta(n_0, p-1) \neq 0$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(n, p-1) \neq 0.$$

4° On conserve les hypothèses de la question précédente.

Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *non nul* de $\mathbb{R}^{p+1}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_0 u_n + \alpha_1 u_{n+1} + \ldots + \alpha_p u_{n+p} = 0.$$

Si la suite $\{ u_n \}$ est une suite d'entiers, existe-t-il une solution $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ où les α_j sont des entiers?

E.N.S.A.E. II 1980 -120-

. . . / . . .

Partie III

Soit θ un nombre réel, non entier, et supérieur à 1.

On suppose qu'il existe une suite *d'entiers* $\{ u_n \}$, un réel $C > 0$ et un réel $\gamma \in]0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad | u_n - \theta^n | \leqslant C \gamma^n .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \theta^n$ et $u_n = v_n + \varepsilon_n$.

Enfin, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on considère les matrices colonnes

$$U_n^p = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n+p} \end{bmatrix} ; \quad V_n^p = \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n+p} \end{bmatrix} ; \quad E_n^p = \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_{n+p} \end{bmatrix} .$$

Avec ces notations, le déterminant $\Delta(n, p)$ associé à la suite $\{ u_n \}$ et défini dans la partie précédente peut être noté

$$\Delta (n, p) = \det [U_n^p, U_{n+1}^p, \ldots, U_{n+p}^p].$$

1° Montrer que

$$\Delta (n, p) = \det [E_n^p, E_{n+1}^p, \ldots, E_{n+p}^p] + \sum_{j=0}^{p} \Delta_j$$

où Δ_j est le déterminant déduit de $\det [E_n^p, \ldots, E_{n+p}^p]$ par substitution de V_{n+j}^p à E_{n+j}^p.

Tournez la page S. V. P.

2° Soit A une matrice carrée d'ordre r, de coefficients aij réels.

Pour tout $j \in [1, r]$, on pose $\rho_j = \sup_{i \in [1, r]} | a_{ij} |$

Montrer l'inégalité

$$| \det A | \leqslant K_r \prod_{j=1}^{r} \rho_j$$

où K_r est un réel positif ne dépendant que de r.

3° Utiliser les résultats précédents pour majorer $| \Delta (n, p) |$ et en déduire qu'il existe $p_0 \geqslant 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \Delta (n, p_0) = 0.$$

Partie IV

Les notations sont celles de la partie III.

1° Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\Sigma u_n z^n$?

On pose pour z complexe tel que $|z| < R$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.

2° Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q à coefficients *entiers* et premiers entre eux tels que pour tout z complexe vérifiant $|z| < R$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} .$$

3° Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\Sigma \varepsilon_n z^n$ est strictement supérieur à 1 et que la somme de cette série est une fraction rationnelle à coefficients réels.

En déduire que $\frac{1}{\theta}$ est une racine de l'équation algébrique

$$Q(z) = 0$$

et que les autres racines de cette équation ont un module strictement supérieur à 1.

Suite ⟶

4° Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}^*$ tel que le développement en série entière de $\frac{m}{Q(z)}$ soit à coefficients entiers.

Soit $\Sigma w_n z^n$ ce développement.

On désigne par w le p.g.c.d. des w_n et par q celui des coefficients de Q. On pose

$$Q' = \frac{1}{q} Q \quad \text{et} \quad w'_n = \frac{1}{w} w_n .$$

Montrer que pour z complexe tel que $|z| < R$

$$Q'(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w'_n z^n = \pm 1 .$$

Que peut-on en déduire pour θ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail